GUIA METÁLICO DE SECÇÃO RECTANGULAR

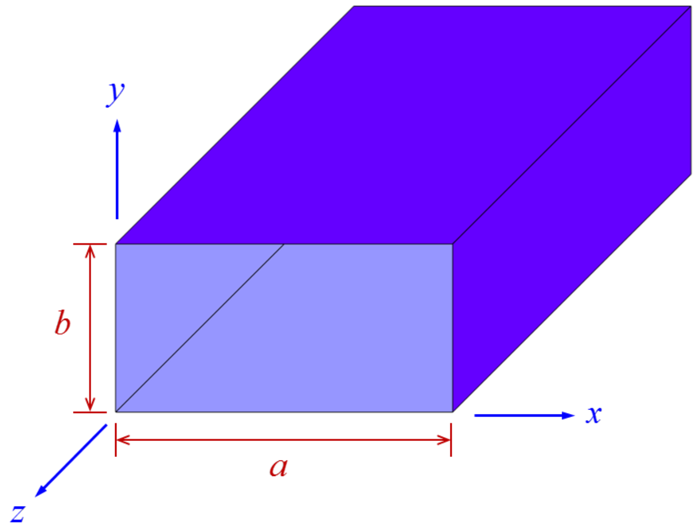
Propagação e Antenas

IST - 2015

PROF. CARLOS R. PAIVA
DEEC – Área Científica de Telecomunicações

GUIA METÁLICO DE SECÇÃO RECTANGULAR

No *guia metálico* de *secção rectangular* podem propagar-se modos transversais do tipo TE e TM – mas não do tipo TEM. O guia é oco, preenchido por ar, sendo limitado – na sua secção transversal – por paredes condutoras (eléctricas) perfeitas em $x = 0, a$ e em $y = 0, b$ (como se indica na figura anexa).



As paredes metálicas forçam as seguintes *condições fronteira*:

$$\begin{bmatrix} x = 0, a & \mapsto & E_y = 0, \\ y = 0, b & \mapsto & E_x = 0. \end{bmatrix}$$

Consideram-se, sempre, ondas *planas* e *monocromáticas* da forma

$$\exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right] \quad \mapsto \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} .$$

Assim, tem-se

$$\left[\begin{array}{ll} \dfrac{\partial}{\partial t} & \mapsto \quad -i\omega \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & \mapsto \quad i\beta \end{array}\right.$$

e, em particular,

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + i\beta \mathbf{e}_3 .$$

Seja $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_1 + A_y \mathbf{e}_2 + A_z \mathbf{e}_3$ um vector de $\mathbb{R}^3$. Então, vem

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & i\beta \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - i\beta A_y \right) \mathbf{e}_1 + \left(i\beta A_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_3 .$$

Assim, das equações de Maxwell para regiões sem fontes,

$$\left[\begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D} \end{array}\right.$$

e, supondo que o interior do guia tem preenchimento homogéneo de ar, em que

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \end{array}\right.$$

infere-se que

$$\left[\begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}. \end{array}\right.$$

Donde,

$$\left[\begin{array}{l} (\nabla \times \mathbf{E})_x = \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - i\beta E_y \\ (\nabla \times \mathbf{E})_y = i\beta E_x - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \\ (\nabla \times \mathbf{E})_z = \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} (\nabla \times \mathbf{H})_x = \dfrac{\partial H_z}{\partial y} - i\beta H_y \\ (\nabla \times \mathbf{H})_y = i\beta H_x - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} \\ (\nabla \times \mathbf{H})_z = \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} \end{array}\right.$$

pelo que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - i\beta E_y = i\omega\mu_0 H_x \\ i\beta E_x - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega\mu_0 H_y \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega\mu_0 H_z \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_z}{\partial y} - i\beta H_y = -i\omega\varepsilon_0 E_x \\ i\beta H_x - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = -i\omega\varepsilon_0 E_y \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = -i\omega\varepsilon_0 E_z \end{cases}$$

Um modo do tipo TEM teria, simultaneamente, $E_z = 0$ e $H_z = 0$. Num modo do tipo TE é $E_z = 0$ mas $H_z \neq 0$. Num modo do tipo TM, por sua vez, é $H_z = 0$ mas $E_z \neq 0$. Um modo é considerado híbrido se (e só se) for $E_z \neq 0$ e $H_z \neq 0$.

MODOS TE

Nos modos TE, em que $E_z = 0$, as componentes (E_x, E_y, H_x, H_y) do campo electromagnético podem ser obtidas em função da componente H_z (dita, por essa razão, componente de suporte).

Portanto, vem

$$\begin{cases} -i\beta E_y = i\omega\mu_0 H_x \quad \mapsto \quad \boxed{H_x = -\dfrac{\beta}{\omega\mu_0} E_y} \\ i\beta E_x = i\omega\mu_0 H_y \quad \mapsto \quad \boxed{H_y = \dfrac{\beta}{\omega\mu_0} E_x} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega\mu_0 H_z \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_z}{\partial y} - i\beta H_y = -i\omega\varepsilon_0 E_x \\ i\beta H_x - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = -i\omega\varepsilon_0 E_y \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

e, ainda,

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - i\beta H_y = -i\omega\varepsilon_0 E_x \quad \mapsto \quad \boxed{E_x = i\frac{\omega\mu_0}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}},$$

$$i\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\omega\varepsilon_0 E_y \quad \mapsto \quad \boxed{E_y = -i\frac{\omega\mu_0}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}}.$$

Nesta última equação introduziu-se

$$\boxed{k_c^2 = k_0^2 - \beta^2}.$$

Note-se, desde já, que se tem (impedância do modo TE)

$$\boxed{Z_{\text{TE}} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu_0}{\beta}}.$$

Deste modo,

$$\boxed{H_x = i\,\frac{\beta}{k_c^2}\,\frac{\partial H_z}{\partial x}}\,,$$

e, de forma análoga,

$$\boxed{H_y = i\,\frac{\beta}{k_c^2}\,\frac{\partial H_z}{\partial y}}\,.$$

Finalmente, obtém-se a equação diferencial

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\,\omega\,\mu_0\,H_z \quad \mapsto \quad \boxed{\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = -k_c^2\,H_z}\,.$$

Esta equação pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Com efeito, façamos

$$\boxed{H_z(x, y, z, t) = f(x)\,g(y)\exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right]}\,.$$

Logo,

$$\left[\begin{array}{l} E_x = i\,\dfrac{\omega\,\mu_0}{k_c^2}\,f(x)\,\dfrac{d\,g}{d\,y}\exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right] \\ E_y = -i\,\dfrac{\omega\,\mu_0}{k_c^2}\,\dfrac{d\,f}{d\,x}\,g(y)\exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right] \\ H_x = i\,\dfrac{\beta}{k_c^2}\,\dfrac{d\,f}{d\,x}\,g(y)\exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right] \\ H_y = i\,\dfrac{\beta}{k_c^2}\,f(x)\,\dfrac{d\,g}{d\,y}\exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right] \end{array}\right.$$

Nestas condições, tira-se que

$$g(x)\,\frac{d^2 f}{d\,x^2} + f(x)\,\frac{d^2 g}{d\,y^2} = -k_c^2\,f(x)\,g(y)\,,$$

de modo que, após dividir todos os termos por $f(x)\,g(y)$, resulta

$$\frac{1}{f(x)}\,\frac{d^2 f}{d\,x^2} + \frac{1}{g(y)}\,\frac{d^2 g}{d\,y^2} = -k_c^2\,.$$

A única forma de satisfazer esta última equação consiste em impor

$$\underbrace{\frac{1}{f(x)}\,\frac{d^2 f}{d\,x^2}}_{-k_x^2} + \underbrace{\frac{1}{g(y)}\,\frac{d^2 g}{d\,y^2}}_{-k_y^2} = -k_c^2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{d^2 f}{d\,x^2} + k_x^2\,f(x) = 0 \\ \dfrac{d^2 g}{d\,y^2} + k_y^2\,g(y) = 0 \end{array}\right.$$

em que se faz, simultaneamente,

$$\boxed{k_x^2 + k_y^2 = k_c^2}\,.$$

Para resolver a equação

$$\frac{d^2 f}{d x^2} + k_x^2 \, f(x) = 0 \,,$$

admitem-se soluções da forma

$$f(x) = F_0 \exp(s\,x) \quad \mapsto \quad \frac{d\,f}{d\,x} = s\,F_0 \exp(s\,x) \quad \mapsto \quad \frac{d^2 f}{d\,x^2} = s^2 F_0 \exp(s\,x)$$

$$\therefore \quad s^2 F_0 \exp(s\,x) + k_x^2 F_0 \exp(s\,x) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + k_x^2 = 0$$

donde

$$\boxed{s = \pm i\,k_x} \quad \mapsto \quad f(x) = F_1 \exp(i\,k_x\,x) + F_2 \exp(-i\,k_x\,x) = C_1 \sin(k_x\,x) + C_2 \cos(k_x\,x) \,.$$

Analogamente, viria

$$\boxed{s = \pm i\,k_y} \quad \mapsto \quad g(y) = G_1 \exp(i\,k_y\,y) + G_2 \exp(-i\,k_y\,y) = D_1 \sin(k_y\,y) + D_2 \cos(k_y\,y) \,.$$

Mas então, vem

$$\begin{aligned} E_x &= i\,\frac{\omega\,\mu_0}{k_c^2}\, f(x)\,\frac{d\,g}{d\,y} \exp\left[i\left(\beta\,z - \omega\,t\right)\right] \\ &= i\,k_y\,\frac{\omega\,\mu_0}{k_c^2}\left[C_1 \sin(k_x\,x) + C_2 \cos(k_x\,x)\right]\left[D_1 \cos(k_y\,y) - D_2 \sin(k_y\,y)\right] \exp\left[i\left(\beta\,z - \omega\,t\right)\right] \end{aligned}$$

e, ainda,

$$\begin{aligned} E_y &= -i\,\frac{\omega\,\mu_0}{k_c^2}\,\frac{d\,f}{d\,x}\, g(y) \exp\left[i\left(\beta\,z - \omega\,t\right)\right] \\ &= i\,k_x\,\frac{\omega\,\mu_0}{k_c^2}\left[C_1 \cos(k_x\,x) - C_2 \sin(k_x\,x)\right]\left[D_1 \sin(k_y\,y) + D_2 \cos(k_y\,y)\right] \exp\left[i\left(\beta\,z - \omega\,t\right)\right] \end{aligned}$$

Assim, as condições fronteira

$$\left[\begin{array}{lll} x = 0, a & \mapsto & E_y = 0, \\ y = 0, b & \mapsto & E_x = 0, \end{array}\right.$$

implicam que

$$\boxed{m, n \in \mathbb{Z}} \quad \mapsto \quad \left[\begin{array}{l} C_1 = 0, \\ D_1 = 0, \\ k_x = m\,\dfrac{\pi}{a}, \\ k_y = n\,\dfrac{\pi}{b}, \end{array}\right.$$

de forma que (com $H_0 = C_2 D_2$)

$$\begin{cases} f(x) = C_2 \cos(k_x x) \\ g(y) = D_2 \cos(k_y y) \end{cases} \mapsto \begin{cases} \dfrac{df}{dx} = -k_x C_2 \sin(k_x x) \\ \dfrac{dg}{dy} = -k_y D_2 \sin(k_y y) \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boxed{H_z(x,y,z,t) = H_0 \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \exp\left[i(\beta z - \omega t)\right]}\,.$$

Daqui decorre que

$$\begin{cases} E_x = -i H_0 \dfrac{\omega \mu_0}{k_c^2} \dfrac{n\pi}{b} \cos\left(m\pi \dfrac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \dfrac{y}{b}\right) \exp\left[i(\beta z - \omega t)\right] \\ E_y = i H_0 \dfrac{\omega \mu_0}{k_c^2} \dfrac{m\pi}{a} \sin\left(m\pi \dfrac{x}{a}\right) \cos\left(n\pi \dfrac{y}{b}\right) \exp\left[i(\beta z - \omega t)\right] \\ H_x = -i H_0 \dfrac{\beta}{k_c^2} \dfrac{m\pi}{a} \sin\left(m\pi \dfrac{x}{a}\right) \cos\left(n\pi \dfrac{y}{b}\right) \exp\left[i(\beta z - \omega t)\right] \\ H_y = -i H_0 \dfrac{\beta}{k_c^2} \dfrac{n\pi}{b} \cos\left(m\pi \dfrac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \dfrac{y}{b}\right) \exp\left[i(\beta z - \omega t)\right] \end{cases}$$

tendo-se

$$\boxed{k_c^2 = m^2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + n^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 = k_0^2 - \beta^2}\,.$$

Uma solução deste tipo é, então, designada por modo TE_{mn} onde o índice m se refere à variação do campo electromagnético ao longo da coordenada x e o índice n se refere à variação do campo electromagnético ao longo da coordenada y. Note-se que podemos ter $m=0$ ou $n=0$ mas não os dois índices simultaneamente nulos – o campo seria, nesse caso, identicamente nulo.

Notemos que

$$\boxed{\lambda f = c} \quad \mapsto \quad \boxed{k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}}\,,$$

$$\boxed{\lambda_c f_c = c} \quad \mapsto \quad \boxed{k_c = \frac{\omega_c}{c} = \frac{2\pi f_c}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_c}}\,,$$

$$\boxed{\lambda_g f = v_p} \quad \mapsto \quad \boxed{\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}}\,.$$

Enquanto k_0 representa a constante de propagação no vácuo (ou, aproximadamente, no ar), k_c apenas depende de (m,n,a,b); β representa, como sempre, a contante de propagação longitudinal no guia de ondas. Assim: λ é o comprimento de onda medido no vácuo; λ_g o comprimento de onda medido no guia para o modo em questão (tanto λ como λ_g correspondam à mesma frequência f de trabalho). Recorde-se, aqui, que a velocidade de fase é dada por

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = c\,\frac{k_0}{\beta}\,.$$

Definindo, então, o índice de refracção modal (ou efectivo) $\bar{n}$, tal que

$$\boxed{\bar{n} = \frac{\beta}{k_0} = \frac{\lambda}{\lambda_g}}\,,$$

infere-se que

$$\boxed{v_p = \frac{c}{\bar{n}}}\,.$$

Note-se que a *impedância* do modo TE é dada por

$$\boxed{Z_{\mathrm{TE}} = \frac{\omega\,\mu_0}{\beta} = \left(\mu_0\,c\right)\left(\frac{k_0}{\beta}\right) = \frac{\eta_0}{\bar{n}}}\,,$$

em que

$$\boxed{\eta_0 = \mu_0\,c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}$$

é a impedância (intrínseca) do vácuo. A velocidade de grupo, por sua vez, é dada por

$$v_g = \frac{1}{\dfrac{d\,\beta}{d\,\omega}} = \frac{1}{\dfrac{d\,\beta}{d\,k_0}\,\dfrac{d\,k_0}{d\,\omega}} = c\,\frac{1}{\dfrac{d\,\beta}{d\,k_0}}\,.$$

Definindo, analogamente, o índice de grupo n_g, tal que

$$\boxed{n_g = \frac{d\,\beta}{d\,k_0}}\,,$$

vem

$$\boxed{v_g = \frac{c}{n_g}}\,.$$

Porém, tem-se

$$k_c^2 = k_0^2 - \beta^2 \quad \mapsto \quad 0 = 2\,k_0 - 2\,\beta\,\frac{d\,\beta}{d\,k_0} \quad \mapsto \quad \frac{d\,\beta}{d\,k_0} = \frac{k_0}{\beta} = \frac{1}{\bar{n}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\bar{n}\,n_g = 1} \quad \mapsto \quad \boxed{v_p\,v_g = c^2}\,.$$

Mas, atendendo a que

$$k_c^2 = m^2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + n^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 \quad \mapsto \quad \boxed{\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}},$$

tem-se, ainda,

$$\boxed{f_c = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}.$$

Fazendo $a > b$ e, mais concretamente, $b = a/\zeta$ com $\zeta > 1$, vem

$$\boxed{f_c = \frac{c}{2a}\sqrt{m^2 + n^2\zeta^2}}.$$

Quando se faz, nesta equação, $m = 1$ e $n = 0$ (que corresponde, portanto, ao modo TE_{10}), vem

$$\boxed{\mathrm{TE}_{10}} \mapsto \boxed{f_c = f_0 = \frac{c}{2a}}.$$

Logo,

$$\boxed{\mathrm{TE}_{mn}} \mapsto \boxed{f_c = f_0\sqrt{m^2 + n^2\zeta^2}}.$$

Por exemplo: para $a = 2.5\,\mathrm{cm}$ resulta $f_0 = 6\ \mathrm{GHz}$. Se se considerar, ainda, $a = 2b$ (i.e., $\zeta = 2$), obtém-se:

$$\boxed{\frac{f_c}{f_0} = \sqrt{m^2 + 4n^2}} \mapsto \left[\begin{array}{lll} \mathrm{TE}_{10} & \mapsto & f_c = f_0 = 6\ \mathrm{GHz} \\ \mathrm{TE}_{01} + \mathrm{TE}_{20} & \mapsto & f_c = 12\ \mathrm{GHz} \\ \mathrm{TE}_{11} & \mapsto & f_c = 13.4164\ \mathrm{GHz} \\ \mathrm{TE}_{21} & \mapsto & f_c = 16.9706\ \mathrm{GHz} \\ \mathrm{TE}_{30} & \mapsto & f_c = 18\ \mathrm{GHz} \\ \mathrm{TE}_{31} & \mapsto & f_c = 21.6333\ \mathrm{GHz} \\ \mathrm{TE}_{40} + \mathrm{TE}_{02} & \mapsto & f_c = 24\ \mathrm{GHz} \end{array}\right.$$

Facilmente se infere que, para qualquer outra escolha de índices (desde que, como se viu atrás, não se considere o caso $m = n = 0$), é sempre

$$f_c \geq f_0,$$

onde a igualdade só se observa para $m = 1$ e $n = 0$. Por outras palavras: a frequência de corte mínima obtém-se, precisamente, para o modo com $m = 1$ e $n = 0$, i.e., para o modo TE_{10}. Por essa razão o modo TE_{10} é designado *modo fundamental*.

Por outro lado, é

$$k_c^2 = k_0^2 - \beta^2 \quad \mapsto \quad \beta^2 = k_0^2 - k_c^2 = k_0^2\left[1 - \left(\frac{k_c}{k_0}\right)^2\right] \quad \mapsto \quad \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2\right]$$

$$\therefore \quad \boxed{\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2}}},$$

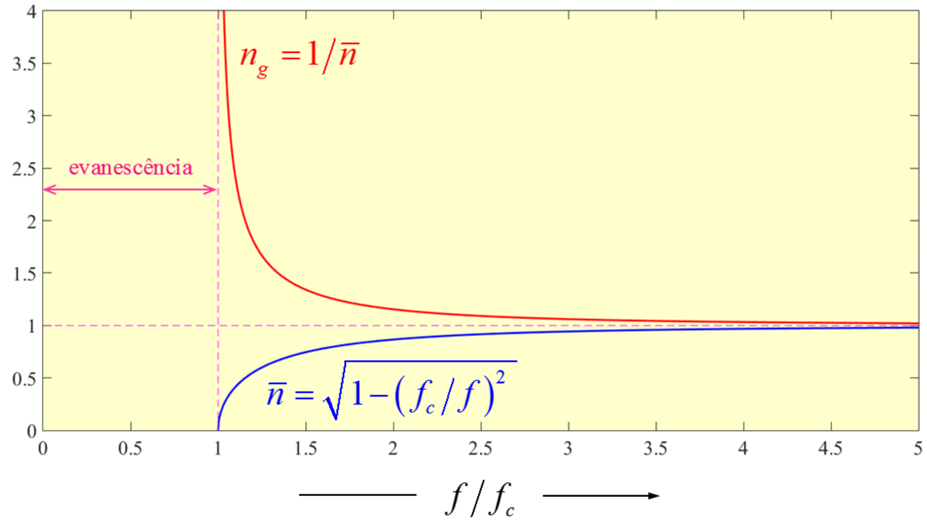
donde

$$\boxed{v_p = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2}}} \quad \mapsto \quad \boxed{v_g = c\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} = c\sqrt{1-\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2}}.$$

Isto significa que

$$\boxed{\bar{n} = \frac{1}{n_g} = \sqrt{1-\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} < 1} \quad \mapsto \quad \boxed{Z_{\mathrm{TE}} = \frac{\eta_0}{\bar{n}} = \eta_0 n_g = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}}.$$

A figura anexa representa a variação com f/f_c de $\bar{n} = c/v_p$ e de $n_g = c/n_g$.



Note-se que é sempre $\lambda_g > \lambda$, embora se tenha

$$\lim_{f\to\infty} \lambda_g = \lambda .$$

Só existe *propagação* (i.e., $\beta^2 > 0$) desde que se tenha $f > f_c$ ou, de forma equivalente, desde que $\lambda < \lambda_c$. Para $f < f_c$ (i.e., para $\lambda > \lambda_c$) obtém-se $\beta^2 > 0$, de modo que a propagação dá lugar, neste caso, à *evanescência*, em que $\beta = \pm i\,\alpha$, com a atenuação $\alpha > 0$:

$$f < f_c \quad \mapsto \quad \exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right] = \exp\left(\pm \alpha z\right)\exp\left(-i\,\omega t\right).$$

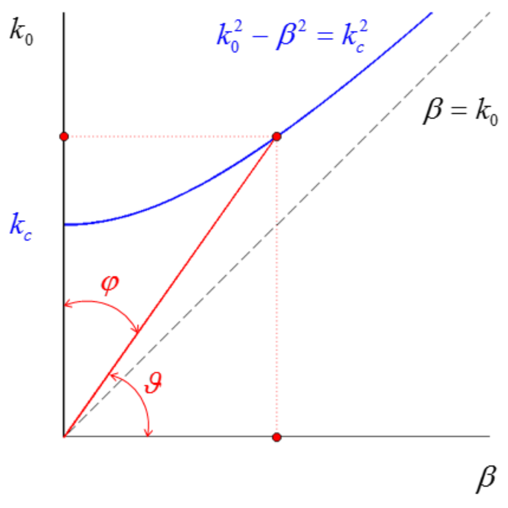
Nesta equação deve ter-se $\exp\left(-\alpha z\right)$ para ondas que se propagavam no sentido positivo do eixo z e $\exp\left(\alpha z\right)$ para ondas que se propagavam no sentido negativo do eixo z.

O guia comporta-se, portanto, como um filtro passa-alto em que existe uma *frequência de corte* (ou *frequência crítica*) f_c. Para $f = f_c$ é $\beta = 0$ (a que corresponde $\lambda_g = \infty$ e $v_p = \infty$) e não há transmissão de informação (já que $v_g = 0$) – apenas se regista uma oscilação harmónica:

$$f = f_c \quad \mapsto \quad \exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right] = \exp\left(-i\,\omega t\right).$$

Na figura anexa representa-se o diagrama de dispersão do guia de secção rectangular.

Diagrama de dispersão do guia metálico de secção rectangular



$$\tan\left(\vartheta\right) = \frac{k_0}{\beta} = \frac{c}{v_g}$$

$$\tan\left(\varphi\right) = \frac{\beta}{k_0} = \frac{c}{v_p}$$

A equação de dispersão

$$\boxed{k_0^2 - \beta^2 = k_c^2}$$

representa uma hipérbole no plano $k_0 - vs - \beta$. A assímptota $\beta = k_0$ representa o limite das frequências muito altas, i.e, quando se faz $f \to \infty$ (ou $\lambda \to 0$). A evanescência corresponde à circunferência

$$\boxed{k_0^2 + \alpha^2 = k_c^2}$$

de raio k_c mas agora no plano $k_0 - vs - \alpha$.

No modo fundamental TE_{10}, então, tem-se

$$\boxed{H_z(x,y,z,t) = H_0 \cos\left(\pi \frac{x}{a}\right) \exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right]}$$

$$\left[\begin{aligned} & E_x = 0 \\ & E_y = i H_0 \frac{\omega \mu_0 a}{\pi} \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right] \\ & H_x = -i H_0 \frac{\beta a}{\pi} \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right] \\ & H_y = 0 \end{aligned}\right.$$

Escolhendo $H_0 \in \mathbb{R}$, com $H_0 > 0$, tem-se $\left(\omega \mu_0 = \eta_0 k_0\right)$

$$|H_z| = \frac{E_0}{\eta_0} \frac{\lambda}{\lambda_c} \cos\left(\pi \frac{x}{a}\right), \qquad |E_y| = E_0 \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right), \qquad |H_x| = \frac{E_0}{Z_{\mathrm{TE}}} \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right),$$

em que se introduziu

$$E_0 = \eta_0 H_0 \frac{k_0 a}{\pi} = \eta_0 H_0 \frac{\lambda_c}{\lambda},$$

e onde se teve em consideração que, para o modo fundamental,

$$k_0 a = 2\pi \frac{a}{\lambda} = \pi \frac{\lambda_c}{\lambda},$$

$$(\beta a)^2 = (k_0 a)^2 - (k_c a)^2 = (k_0 a)^2 - \pi^2 \quad \mapsto \quad \beta a = \pi \sqrt{\left(\frac{k_0 a}{\pi}\right)^2 - 1} = \pi \sqrt{\left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^2 - 1},$$

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^2 - 1} = \frac{\lambda_c}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} = \frac{\lambda_c}{\lambda} \bar{n} = \frac{\lambda_c}{\lambda} \frac{\eta_0}{Z_{\mathrm{TE}}}.$$

Note-se que, para um dado valor fixo da amplitude E_0, vem

$$\lim_{\lambda \to 0} |H_z| = 0,$$

o que significa que o modo TE é, cada vez mais, um modo quase-TEM no limite das altas frequências – em conformidade com

$$\lim_{\lambda\to 0} \beta = k_0, \qquad \lim_{\lambda\to 0} Z_{TE} = \eta_0 .$$

No modo fundamental a potência média transportada ao longo do guia é dada por $(f > f_c)$

$$\begin{aligned} P_t &= \int_0^a \int_0^b \langle S_z \rangle \, dy \, dx = \int_0^a \int_0^b \left(\mathbf{e}_3 \cdot \langle \mathbf{S} \rangle \right) dy \, dx = \Re\left\{ \int_0^a \int_0^b \left(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{S}_c \right) dy \, dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \Re\left\{ \int_0^a \int_0^b \left[\mathbf{e}_3 \cdot \left(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right) \right] dy \, dx \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \Re\left\{ \int_0^a \int_0^b \left(E_y H_x^* \right) dy \, dx \right\} \end{aligned}$$

pelo que $(E_0 > 0)$

$$P_t = \left(\eta_0 H_0\right) H_0 \frac{\left(k_0 a\right)\left(\beta a\right)}{4\pi^2} \left(a b\right) \quad \mapsto \quad \boxed{P_t = \frac{E_0^2}{Z_{\mathrm{TE}}} \frac{a b}{4}},$$

dado que

$$\int_0^a \sin^2\left(\pi \frac{x}{a}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^a \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{x}{a} \right) \right] dx = \frac{a}{2} .$$

MODOS TM

Nos modos TM, em que $H_z = 0$, as componentes $\left(E_x, E_y, H_x, H_y\right)$ do campo electromagnético podem ser obtidas em função da componente E_z (dita, por essa razão, componente de suporte).

Portanto, vem

$$\left[\begin{aligned} & \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\beta E_y = i\omega\mu_0 H_x \\ & i\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega\mu_0 H_y \\ & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} & -i\beta H_y = -i\omega\varepsilon_0 E_x \quad \mapsto \quad \boxed{E_x = \frac{\beta}{\omega\varepsilon_0} H_y} \\ & i\beta H_x = -i\omega\varepsilon_0 E_y \quad \mapsto \quad \boxed{E_y = -\frac{\beta}{\omega\varepsilon_0} H_x} \\ & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -i\omega\varepsilon_0 E_z \end{aligned}\right.$$

e, ainda,

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - i\beta E_y = i\omega\mu_0 H_x \quad \mapsto \quad \boxed{H_x = -i \frac{\omega\varepsilon_0}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}},$$

$$i\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega\mu_0 H_y \quad \mapsto \quad \boxed{H_y = i \frac{\omega\varepsilon_0}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}}.$$

Nesta última equação introduziu-se (tal como para os modos TE)

$$\boxed{k_c^2 = k_0^2 - \beta^2}\ .$$

Note-se, desde já, que se tem (impedância do modo TM)

$$\boxed{Z_{\mathrm{TM}} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon_0}}\ .$$

Deste modo,

$$\boxed{E_x = i\,\frac{\beta}{k_c^2}\,\frac{\partial E_z}{\partial x}}\ ,$$

e, de forma análoga,

$$\boxed{E_y = i\,\frac{\beta}{k_c^2}\,\frac{\partial E_z}{\partial y}}\ .$$

Finalmente, obtém-se a equação diferencial

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -i\,\omega\,\varepsilon_0\,E_z \quad \mapsto \quad \boxed{\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -k_c^2\,E_z}\ .$$

Agora, à semelhança dos modos TE, tem-se (*mutatis mutandis*)

$$\boxed{E_z(x,y,z,t) = f(x)\,g(y)\exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right]}$$

$$\left[\begin{aligned}
E_x &= i\,\frac{\beta}{k_c^2}\,\frac{d f}{d x}\,g(y)\exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right]\\
E_y &= i\,\frac{\beta}{k_c^2}\,f(x)\,\frac{d g}{d y}\exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right]\\
H_x &= -i\,\frac{\omega\varepsilon_0}{k_c^2}\,f(x)\,\frac{d g}{d y}\exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right]\\
H_y &= i\,\frac{\omega\varepsilon_0}{k_c^2}\,\frac{d f}{d x}\,g(y)\exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right]
\end{aligned}\right.$$

As mesmas condições fronteira impõem, neste caso,

$$\boxed{E_z(x,y,z,t) = E_0 \sin\left(m\pi\,\frac{x}{a}\right)\sin\left(n\pi\,\frac{y}{b}\right)\exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right]}\ .$$

Assim, obtém-se

$$\begin{cases} E_x = i\,E_0\,\dfrac{\beta}{k_c^2}\,\dfrac{m\pi}{a}\cos\left(m\pi\,\dfrac{x}{a}\right)\sin\left(n\pi\,\dfrac{y}{b}\right)\exp\left[i\left(\beta z-\omega t\right)\right] \\ E_y = i\,E_0\,\dfrac{\beta}{k_c^2}\,\dfrac{n\pi}{b}\sin\left(m\pi\,\dfrac{x}{a}\right)\cos\left(n\pi\,\dfrac{y}{b}\right)\exp\left[i\left(\beta z-\omega t\right)\right] \\ H_x = -i\,E_0\,\dfrac{\omega\varepsilon_0}{k_c^2}\,\dfrac{n\pi}{b}\sin\left(m\pi\,\dfrac{x}{a}\right)\cos\left(n\pi\,\dfrac{y}{b}\right)\exp\left[i\left(\beta z-\omega t\right)\right] \\ H_y = i\,E_0\,\dfrac{\omega\varepsilon_0}{k_c^2}\,\dfrac{m\pi}{a}\cos\left(m\pi\,\dfrac{x}{a}\right)\sin\left(n\pi\,\dfrac{y}{b}\right)\exp\left[i\left(\beta z-\omega t\right)\right] \end{cases}$$

tendo-se (tal como para os modos TE)

$$\boxed{k_c^2 = m^2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + n^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 = k_0^2-\beta^2}\,.$$

Uma solução deste tipo é, então, designada por modo TM_{mn} onde o índice m se refere à variação do campo electromagnético ao longo da coordenada x e o índice n se refere à variação do campo electromagnético ao longo da coordenada y. Porém, existe agora uma diferença significativa (em relação ao caso TE): não pode ser nem $m=0$ nem $n=0$ – o campo seria, nesse caso, identicamente nulo. Ou seja: o primeiro modo TM é o modo TM_{11}. Confirma-se, assim, que o modo TE_{10} é, efectivamente, o *modo fundamental* deste guia.

Existe, ainda, outra diferença a assinalar $\left(\varepsilon_0 c = 1/\eta_0\right)$:

$$\boxed{Z_{\mathrm{TM}} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon_0} = \left(\frac{1}{\varepsilon_0 c}\right)\left(\frac{\beta}{k_0}\right) = \eta_0\,\bar{n} = \eta_0\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}\,.$$

Note-se que

$$\boxed{Z_{\mathrm{TE}}\,Z_{\mathrm{TM}} = \eta_0^2}\,.$$